

Vorkurs Mathematik

*Zusammenfassung des für das Chemiestudium notwendigen
mathematischen Wissens aus der gymnasialen Oberstufe*

ÜBUNGSAUFGABEN

2. Version vom 4. September 2017

Institut für Chemie

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Humboldt-Universität zu Berlin

Autoren: Marc Reimann, Fabian Müller, Kim Greis, Julius Stückrath,
Florian Rehak und Robert Haupt

Kontakt: fachchemie@chemie.hu-berlin.de

Alle Rechte vorbehalten. Berlin © 2017.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5
1.1 Logik	5
1.2 Betrag	6
1.3 Binomische Formeln	6
1.4 Primfaktorzerlegung	7
1.5 Vereinfachung von komplexen Termen	7
1.6 Lineare Gleichungssysteme (LGS)	8
1.7 Potenzen-, Wurzel- und Logarithmengesetze	8
1.8 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis	9
1.9 Komplexe Zahlen	10
2 Lineare Algebra	11
2.1 Verknüpfungen von Vektoren	11
2.1.1 Addition	11
2.1.2 Skalare Multiplikation	11
2.1.3 Skalarprodukt	12
2.1.4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	12
2.1.5 Spatprodukt	13
2.2 Euklid'sche Norm	13
2.3 Orthogonalität	14
2.4 Matrizen	15
2.4.1 Addition	15
2.4.2 Matrixmultiplikation	15
3 Analysis I	16
3.1 Funktionen einer Variablen	16
3.2 Grenzwerte	17
3.3 Ableitungen	17
3.4 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel	18
3.5 Höhere Ableitungen	18
3.6 Kurvendiskussion	18
4 Analysis II	20
4.1 Koordinatensysteme	20
4.2 Partielle Ableitungen und das Totale Differential	20
4.3 Integrale (Substitution, partielle Integration)	22
4.4 Uneigentliche Integrale	23

4.5	Integrale mehrerer Variablen	23
-----	--	----

1 Grundlagen

Ein Online-Kurs der TU Berlin zur Wiederholung und zum Auffrischen der mathematischen Fähigkeiten findet sich hier: http://www.math.tu-berlin.de/omb/v_menuue/home/.

1.1 Logik

⇒ Lösen Sie die folgenden zwei Rätsel¹. Begründen Sie Ihre Antworten.

Der Planet Og wird von zwei verschiedenen Rassen bewohnt – dem grünen und dem roten Volk. Des Weiteren sind die Leute, die auf der nördlichen Halbkugel geboren wurden von denen auf der südlichen Halbkugel sehr verschieden. Das Komische an dem Planeten ist, dass die grünen Nordler immer die Wahrheit sagen und die roten Nordler immer lügen, während die grünen Südlr lügen und die roten Südlr die Wahrheit sagen.

Rätsel 1:

Zwei Bewohner von Og, A und B, hatten nicht dieselbe Hautfarbe und stammten von verschiedenen Halbkugeln. Sie machten folgende Aussagen:

A: „B ist aus dem Norden.“

B: „A ist rot.“

Welche Farbe haben A und B, und woher stammen sie?

Rätsel 2:

Ein weiteres Duo zwei verschiedenfarbiger Bewohner von Og, A und B, machten die folgenden Aussagen:

A: „B ist ein Nordler.“

B: „Wir sind beide Nordler.“

Was sind A und B?

¹Quelle: Der Planet Og aus *Satan, Cantor und die Unendlichkeit*, Raymond Smullyan, Springer Basel AG, 1993.

1.2 Betrag

⇒ ① Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Ausdrücke in dem Intervall $-10 \leq x \leq 10$ bzw. mit allgemeinen Achsenbeschriftungen für Aufgabenteil e).

a) $||x| - 4|$

b) $|x - 2|$

c) $||x| - 3| - 5|$

d) $|x| - 3$

e) $||x - c| - a| + b$

⇒ ② Sortieren Sie folgende Terme nach der Wertigkeit ihres Ergebnisses.

Es gilt: $a < b < \dots < z$

a) $|x^2 - x^3|$, $|x^2|$, $|-x^3|$, $|x^4|$ für $x < -2$

b) $|(-b)^2|$, $|a^2|$, $|c^2|$, $|bc^2|$ für $a, b, c > 1$

c) $\left|\frac{3}{(-5)}\right|$, $\frac{9}{7}$, $-|1, 3|$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$

d) $\frac{43}{59}$, $\frac{8}{6}$, $\left|\frac{(-3)}{590}\right|$, $-|1, 3|$, $|-1, 3|$

1.3 Binomische Formeln

⇒ ① Stellen Sie die erste Binomische Formel graphisch dar.

⇒ ② Formen Sie die folgenden Ausdrücke in eine binomische Formel der Form $(x \pm y)^z \pm a$ um.

a) $x^3 + 12xy^2 + y^3$

b) $x^2 + 16x - 16$

c) $-x^3 + 12x^2 - 48x$

d) $e^4 - 6e^3f + 4e^2f^2$

⇒ ③ Berechnen Sie jeweils die Variable. Nutzen Sie eine geeignete quadratische Ergänzung.

a) $0 = b^3 - 9b^2 + 27b + 37$

b) $0 = m^3 - 27m^2 + 243m - 1241$

c) $0 = p^4 - 12p^3 + 54p^2 - 108p + 80$

1.4 Primfaktorzerlegung

⇒ Zerlegen Sie folgende Zahlen in ihre Primfaktoren. Doppelte Primzahlen können in Potenzen zusammengefasst werden.

a) 132

b) 56700

c) 18225

d) $\frac{1}{27} \cdot 63^4$

1.5 Vereinfachung von komplexen Termen

⇒ ① Expandieren Sie die folgenden Ausdrücke in Summen.

a) $\frac{a \cdot (b + x) \cdot \left(c + \frac{y}{x}\right)}{a \cdot c}$

b) $\frac{(2x^2 \cdot y) \cdot (4z \cdot y) \cdot (3x + 2y + z) \cdot (4x \cdot 2z - 4y)}{16 \cdot x \cdot y \cdot z}$

c) $((c + e)^2 + b)^2$

⇒ ② Fassen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich zusammen.

a) $16x^3 + 5xy^2 - 2y^3 - 24x^2y + 7xy^2$

b) $\frac{1}{x^2 - 2x - 15} \cdot (x^3 + 3x^2 - 25x - 75)$

c) $b^3 + 3 \cdot (a + c) \cdot b^2 + (6ac + 3c^2 + 3a^2) \cdot b + (3c^2a + a^3 + 3a^2c + c^3)$

⇒ ③ Bestimmen Sie jeweils die Variablen ggf. in Abhängigkeit voneinander, indem Sie die Ausdrücke so weit wie möglich vereinfachen.

a)
$$\frac{5 \cos^2(\alpha)}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \sin^2(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha)}{\sqrt{6}} - \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \left(\frac{13 \cos^2(\alpha)}{4\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \frac{3\sqrt{6}}{8} \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{2 \cos(\alpha)}{\sqrt{24}} + \frac{3\sqrt{6}}{4} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

b) $1 = \frac{\omega(\tau^3 - 9\tau^2 + 27\tau - 27)}{2\tau^2 - 12\tau + 18}$

c) $\frac{2a_1}{2a_2a_3 - 3a_1a_2} = \frac{9\sqrt{4}a_1^2}{3a_1 - 2a_3} + \frac{2a_1}{3a_2a_1 - 2a_3a_2}$

1.6 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

⇒ Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme beispielsweise durch sinnvolles Addieren eines Vielfachen einer Gleichung auf eine andere.

a) Bestimmen Sie x und y .

$$6x + 12y = 30$$

$$3x + 3y = 9$$

b) Bestimmen Sie x , y und z .

$$-x + y + z = 0$$

$$x - 3y - 2z = 5$$

$$5x + y + 4z = 3$$

c) Bestimmen Sie x_1 bis x_4 .

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -5$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -8$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 12$$

$$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

d) Bestimmen Sie x_1 bis x_4 .

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -9$$

1.7 Potenzen-, Wurzel- und Logarithmengesetze

⇒ ① Berechnen Sie jeweils x .

a) $x^{-3} = \frac{144}{x^5}$

b) $x^6 = \sqrt{y^3}$

c) $x^2 = \frac{343}{x}$

⇒ ② Lösen Sie nach der Unbekannten auf und bestimmen Sie diese.

a) $\ln(x) = \ln(5) - \ln(x^2) + \ln(2)$

b) $e^{\gamma^2+1} = 5$

c) $5^x = 2$

d) $-\lg(10^{-4}) = \text{pH}$

e) $\exp \left\{ \ln \left(\frac{e}{2^2} \right) + 1 \right\} = \frac{1}{4}$

⇒ ③ Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $2 \ln(x+1) = \ln(x^3+1) - \ln(x)$

b) $2e^{-x} - 12e^x = 5$

c) $\log_5(1+x) - \log_{\sqrt{5}}(1-2x) = \log_{\frac{1}{5}}(3+4x)$

1.8 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

⇒ Zeigen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind.

a) $2 \cos^2(\alpha) = \cos(2\alpha) + 1$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ist berechenbar mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ und

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$

Nutzen Sie den Zusammenhang $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

1.9 Komplexe Zahlen

⇒ ① Führen Sie folgende Rechnungen mit komplexen Zahlen aus.

a) $(5 + 3i) + (2 + 7i)$

f) $|(2i + 1)|$

b) $(1 - 2i) + (-2 + i)$

g) $\frac{3 + i}{1 - i}$

c) $(3 + i) - (2 - i)$

d) $(1 + i) \cdot (3 - i)$

e) $(2i - 1) \cdot (1 + 2i)$

⇒ ② Vereinfachen Sie den Ausdruck $\ln \left(\frac{2\pi}{e^{-i\pi} + 3} \right)$.

2 Lineare Algebra

2.1 Verknüpfungen von Vektoren

2.1.1 Addition

⇒ Berechnen Sie folgende Summen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ -x + z \\ 3y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x - 2z \\ 2x + 3y \\ -x + z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ x + 2y + z \\ -x + 3y \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 5i - 1 \\ -i + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3i + 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Skalare Multiplikation

⇒ Skalieren Sie die Vektoren wie angegeben.

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } (2x + y) \cdot \begin{pmatrix} -2x - y \\ 2x - y \\ 2 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} -y \\ -y \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (2i - 1) \cdot \begin{pmatrix} i + 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Skalarprodukt

⇒ Berechnen Sie folgende Skalarprodukte.

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

d) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 42 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

e) Zeigen Sie, dass $\langle c \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = c \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gilt.
Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

c) $\left\langle \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ -i \\ i-3 \end{pmatrix} \right\rangle$

2.1.4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

⇒ Berechnen Sie folgende Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2i \\ 3 \\ i-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2i+1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) Zeigen Sie, dass
 $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ gilt.
Es sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

c) $\begin{pmatrix} 2x+3 \\ y^2 \\ -x+z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ z+3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3y^2+z^2-xz \\ 0 \\ -y^2-2xz \end{pmatrix}$

2.1.5 Spatprodukt

⇒ Berechnen Sie folgende Spatprodukte.

a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

c) $\left(\begin{pmatrix} 2x \\ -3 \\ 5y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -4x \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8x^2 \\ 5y^2 \end{pmatrix} \right)$

d) Die Punkte $A = (0, -1, 1)$, $B = (4, -1, 1)$, $C = (5, 1, 1)$, $D = (1, 1, 1)$, $E = (1, 0, 3)$, $F = (5, 0, 3)$, $G = (6, 2, 3)$ und $H = (2, 2, 3)$ bilden die Ecken eines Parallelepipeds (Spat). Berechnen Sie dessen Volumen mit Hilfe des Spatproduktes.

e) Zeigen Sie, dass $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, (\vec{b} \times \vec{c}) \rangle$ gilt. Es sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

2.2 Euklid'sche Norm

⇒ Im Folgenden ist mit *Norm* stets die *Euklid'sche Norm* gemeint.

a) Berechnen Sie die Norm und bilden Sie den normierten Vektor.

(i) $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$

(ii) $\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|$

b) Bestimmen Sie die Norm.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

c) Bestimmen Sie die beiden Vektoren, die orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen und die Länge 2 besitzen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d) Welchen Abstand haben zwei diametral gegenüberliegende Ecken eines Würfels mit der Kantenlänge a ?

- e) Es sind der Punkt $P = (2, 0, 1)$ und die Ebene $E : x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$ gegeben, wobei P nicht in E liegt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes von der Ebene.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst eine Gerade, die durch P verläuft und die Ebene senkrecht schneidet.

2.3 Orthogonalität

⇒ Nutzen Sie für folgende Aufgaben die Definition des Skalarproduktes: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$.

- a) Prüfen Sie, welche der Vektoren zueinander orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$(i) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.

$$(i) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- d) Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 3)$ und $D = (3, 0)$ durch Vektoren aus. Sind sie zueinander orthogonal?

- e) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 .

$$E_1 : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$$

$$E_2 : x_2 + 2x_3 = 0$$

2.4 Matrizen

2.4.1 Addition

⇒ Addieren Sie folgende Matrizen.

a) $3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

2.4.2 Matrixmultiplikation

⇒ Multiplizieren Sie folgende Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2$

3 Analysis I

3.1 Funktionen einer Variablen

⇒ ① Stellen Sie die Funktionsgleichungen für folgende Probleme auf.

- a) Aus einem Draht der Länge 2 werden vier Teile geschnitten, wobei je zwei Teile genau gleich lang sind. Aus den vier Teilen wird ein Rechteck gelegt. Wie groß ist der Flächeninhalt F dieses Rechtecks und von wie vielen Variablen hängt er mindestens ab?
- b) Von einem Faden der Länge L wird ein Stück der Länge k abgeschnitten. Wie groß ist die Gesamtfläche $A_L(k)$ der beiden Kreise, die sich mit den Stücken legen lassen?
- c) Auf Ihrem Konto befinden sich 1500 €. Wie lange müssen Sie bei 2% Jahreszins sparen, damit Sie das Semesterticket (300 €) allein aus den Zinserträgen bezahlen können? Stellen Sie zunächst eine allgemeine Formel für Ihren Kontostand $G(t)$ als Funktion der Zeit t in Jahren auf (mit Startkapital S und Zinssatz p).
- d) Ein Werkstück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat eine Hypotenusenlänge von c und eine Dicke von 3. Welches Materialvolumen V wird für seine Herstellung benötigt, wenn einer der beiden Winkel den Betrag φ hat?

⇒ ② Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $g(k) = \frac{1}{k^2}$

c) $t(y) = \frac{1}{e^{-y} + 1}$

d) $\pi(d) = e^{-d^2}$

3.2 Grenzwerte

⇒ Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2}$

e) $\lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{1}{a-1} \cdot \frac{a^2-1}{(a-1)^2} \right)$

b) $\lim_{k \rightarrow 3} \frac{-7}{(k-3)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2-4}{z-2}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi - \left(-\frac{1}{10} \right)^n$

d) $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} a^{-\varphi}$ mit $a > 1$

3.3 Ableitungen

⇒ ① Gegeben sei die Funktion $f(t) = t^2$.

a) Berechnen Sie den mittleren Anstieg (Differenzenquotient) der Funktion in den Intervallen $[-1, 2]$, $[0, 1]$ und $[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$.

b) Schätzen Sie den Anstieg an der Stelle $x = 0,5$ ab.

c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie den tatsächlichen Anstieg an der Stelle $x = 0,5$ an.

⇒ ② Bestimmen Sie den Extrempunkt der folgenden Funktionen.

a) $F(a) = a(1-a)$

b) $A_L(k) = \frac{1}{4\pi} (k^2 + (L-k)^2)$

⇒ ③ Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 7x - 9)$

d) $\frac{d}{dy}(x \ln(y) - \cos(y))$

b) $\frac{d}{dt} \left(\sin(t) + \frac{1}{3}t^3 \right)$

e) $\frac{d}{dk} (\sqrt{k} + t \cdot e^k)$

c) $\frac{d}{dx} \left(2y \cdot e^{-x} - \frac{1}{x^3} \right)$

3.4 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

⇒ Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{d}{dx} (\sin(x^2 - 3))$

f) $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x\sqrt{1-x}} \right)$

b) $\frac{d}{dt} (e^{-t \cdot \sin(t)})$

g) $\frac{d}{dn} (n^n)$

c) $\frac{d}{d\varphi} (\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi))$

h) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \right)$

d) $\frac{d}{dk} (k^2 - 1)^{17}$

i) $\frac{d}{dr} (r \cdot e^{-r^2})$

e) $\frac{d}{dy} \left(\frac{8y^2 - 1}{y + 2} \right)$

3.5 Höhere Ableitungen

⇒ ① Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2}$

d) $\frac{d^2}{dy^2} \tan(y)$

b) $\frac{d^3}{dx^3} (ax^3 + bx^2 + cx)$

e) $\frac{d^2}{dx^2} \ln(x)$

c) $\frac{d^2}{d\varphi^2} (\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi))$

f) $\frac{d^2}{dr^2} (1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$

⇒ ② Wo haben folgende Funktionen eine betragsmäßig maximale Steigung?

a) $f(y) = y e^{-y^2}$

b) $f(p) = p^3 + p^2 - xp + k$

3.6 Kurvendiskussion

⇒ Zeichnen Sie auf Grundlage Ihrer Untersuchung jeweils den Graphen der Funktion.

- a) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten anhand der Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Diskutieren Sie zudem die Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches. Welche Extrempunkte erhält man, wenn man nur den Teil der Funktion mit der höchsten Potenz betrachtet?

- b) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten, Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches der Funktion $f(c) = (c^2 - 1) \cdot e^{2c}$. Berechnen Sie die Fläche zwischen λ (mit $\lambda < -1$) und -1 zwischen der Funktion und der x -Achse. Welches Resultat erhält man für die Fläche, wenn λ sich $-\infty$ annähert?
- c) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten, Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches der Funktion $k(x) = x^3 \cdot \ln(x) - x^3$. Berechnen Sie die Fläche zwischen λ (mit $0 < \lambda < e$) und e zwischen der Funktion und der x -Achse. Welches Resultat erhält man für die Fläche, wenn λ sich 0 annähert?

4 Analysis II

4.1 Koordinatensysteme

⇒ Nutzen Sie Koordinatentransformationen zum Lösen der folgenden Aufgaben.

- a) Ein Punkt liege in der 2D-Ebene bei $r = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{4}$. Geben Sie den Punkt in kartesischen Koordinaten an.
- b) Ein Punkt liege im kartesischen Koordinatensystem bei $x = 1$, $y = 1$ und $z = \sqrt{2}$. Geben Sie seine Position sowohl in Kugel- als auch Zylinderkoordinaten an.

4.2 Partielle Ableitungen und das Totale Differential

⇒ Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Bildung partieller Ableitungen und ggf. durch Aufstellen des Totalen Differentials.

- a) Gegeben sei $\sqrt{U(S, V)} = 1 + \ln\left(\frac{S}{V}\right)$.
 - (i) Finden Sie einen Ausdruck für $U(S, V)$.
 - (ii) Überprüfen Sie, ob der Satz von Schwarz erfüllt ist.
- b) Bilden Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial c(t, \tau)}{\partial t}$ und $\frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau}$.

$$c(t, \tau) = a e^{-\frac{t}{\tau}} + b e^{-t}$$

- c) Geben Sie eine explizite Funktion für $G(P, S)$ an, wenn $H = \left(\frac{S}{P}\right)^{-2}$.

$$G\left(P, \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)\right) = P(1 - P) + \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)^3$$

- d) Zeigen Sie, dass der Satz von Schwarz für folgendes Totales Differential erfüllt ist.

$$dE(\theta, \phi) = \left(1 - \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right)^2\right) \cos(\phi) d\theta - \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right) \sin(\phi) d\phi$$

e) Bilden Sie alle einfachen partiellen Ableitungen nach den abhängigen Variablen.

(i) $z(x, y) = \frac{xy}{2} + (x\sqrt{y})^2$

(iv) $H(p, q) = pq + (pq)^2 + (pq)^{-2}$

(ii) $\psi(\omega, t) = \sin(\omega t) \cos(t)$

(v) $x(t, r) = r e^{-(\frac{t}{r})^2}$

(iii) $m(\alpha, n) = \frac{\alpha(n^2 + n^3)}{\sqrt{\alpha}}$

(vi) $\xi(g, \beta) = \frac{\ln(\beta)}{g} + a$

f) Gegeben sei $R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Bestimmen Sie ausgehend von den Werten $R_1 = (100 \pm 2)\Omega$ und $R_2 = (200 \pm 4)\Omega$ den Fehler in R.

4.3 Integrale (Substitution, partielle Integration)

⇒ Berechnen Sie folgende Integrale. Nutzen Sie dazu ggf. Substitution und/oder partielle Integration.

a) $\int x \, dx$

b) $\int x \cdot 3 \cdot x^3 \, dx$

c) $\int \cos(3u) \, du$

d) $\int_1^2 \ln(x) \, dx$

e) $\int 3x \cdot \sin(x) \, dx$

f) $\int \sin(2x) \cdot \cos(2x) \, dx$

g) $\int_0^\pi x^2 \, dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin(x) \, dx$

i) $\int_{-2}^{-1} \frac{x + \ln(-x)}{x^3} \, dx$

j) $\int e^{2x} \, dx$

k) $\int x \cdot (\sqrt{x+1})^3 \, dx$

l) $\int r \cdot e^{-r^2} \, dr$

4.4 Uneigentliche Integrale

⇒ Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, indem Sie zunächst eine Stammfunktion finden und dann den entsprechenden Grenzwert bilden.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

d) $\int_{-\infty}^1 2^x dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{a}{x} dx$

e) $\int_0^{\infty} 2e^{-4x+1} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} dx$

4.5 Integrale mehrerer Variablen

⇒ Berechnen Sie folgende Integrale, indem Sie nacheinander über alle Variablen integrieren.

a) $\int_2^4 \int_0^1 1 dx dy$

e) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3\pi r dr d\varphi$

f) $\int_{\pi}^{3\pi} \int_1^2 r dr d\varphi$

c) $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^5 r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$

g) $\int_0^1 \int_0^{x+i\pi} e^y dy dx$

d) $\int_1^2 \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^h \rho d\rho d\varphi dz$