Vorkurs Mathematik

Zusammenfassung des für das Chemiestudium notwendigen mathematischen Wissens aus der gymnasialen Oberstufe

Übungsaufgaben

2019

Institut für Chemie

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Humboldt-Universität zu Berlin

Autoren: Marc Reimann, Fabian Müller, Kim Greis, Julius Stückrath, Florian Rehak, Robert Haupt und Julianne Eckert

Kontakt: fachchemie@chemie.hu-berlin.de

1 Grundlagen

Ein Online-Kurs der TU Berlin zur Wiederholung und zum Auffrischen der mathematischen Fähigkeiten findet sich hier: http://www.math.tu-berlin.de/omb/v_menue/home/.

1.1 Logik

⇒ Lösen Sie die folgenden zwei Rätsel[1]. Begründen Sie Ihre Antworten.

> Der Planet Og wird von zwei verschiedenen Rassen bewohnt – dem grünen und dem roten Volk. Des Weiteren sind die Leute, die auf der nördlichen Halbkugel geboren wurden von denen auf der südlichen Halbkugel sehr verschieden. Das Komische an dem Planeten ist, dass die grünen Nordler immer die Wahrheit sagen und die roten Nordler immer lügen, während die grünen Südler lügen und die roten Südler die Wahrheit sagen.

Rätsel 1:
Zwei Bewohner von Og, A und B, hatten nicht dieselbe Hautfarbe und stammten von verschiedenen Halbkugeln. Sie machten folgende Aussagen:

A: „B ist aus dem Norden.“

B: „A ist rot.“

Welche Farbe haben A und B, und woher stammen sie?

Rätsel 2:
Ein weiteres Duo zwei verschiedenfarbiger Bewohner von Og, A und B, machten die folgenden Aussagen:

A: „B ist ein Nordler.“

B: „Wir sind beide Nordler.“

Was sind A und B?

[1] Quelle: Der Planet Og aus *Satan, Cantor und die Unendlichkeit*, Raymond Smullyan, Springer Basel AG, 1993.

1.2 Betrag

⇒ ① Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Ausdrücke in dem Intervall $-10 \leq x \leq 10$ bzw. mit allgemeinen Achsenbeschriftungen für Aufgabenteil e).

a) $||x| - 4|$

b) $|x - 2|$

c) $|||x| - 3| - 5|$

d) $|x| - 3$

e) $||x - c| - a| + b$

⇒ ② Sortieren Sie folgende Terme nach der Wertigkeit ihres Ergebnisses.
Es gilt: $a < b < \ldots < z$

a) $|x^2 - x^3|$, $|x^2|$, $|-x^3|$, $|x^4|$ für $x < -2$

b) $|(-b)^2|$, $|a^2|$, $|c^2|$, $|bc^2|$ für $a, b, c > 1$

c) $\left|\frac{3}{(-5)}\right|$, $\frac{9}{7}$, $-|1,3|$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$

d) $\frac{43}{59}$, $\frac{8}{6}$, $\left|\frac{(-3)}{590}\right|$, $-|1,3|$, $|-1,3|$

1.3 Binomische Formeln

⇒ ① Stellen Sie die erste Binomische Formel graphisch dar.

⇒ ② Formen Sie die folgenden Ausdrücke in eine binomische Formel der Form $(x \pm y)^z \pm a$ um.

a) $x^3 + 12xy^2 + y^3$

b) $x^2 + 16x - 16$

c) $-x^3 + 12x^2 - 48x$

d) $e^4 - 6e^3f + 4e^2f^2$

⇒ ③ Berechnen Sie jeweils die Variable. Nutzen Sie eine geeignete quadratische Ergänzung.

a) $0 = b^3 - 9b^2 + 27b + 37$

b) $0 = m^3 - 27m^2 + 243m - 1241$

c) $0 = 9p^2 + 24p - 185$

1.4 Vereinfachung von komplexen Termen

⇒ ① Expandieren Sie die folgenden Ausdrücke in Summen.

a) $\dfrac{a \cdot (b+x) \cdot \left(c+\frac{y}{x}\right)}{a \cdot c}$

b) $\dfrac{(2x^2 \cdot y) \cdot (4z \cdot y) \cdot (3x+2y+z) \cdot (4x \cdot 2z - 4y)}{16 \cdot x \cdot y \cdot z}$

c) $((c+e)^2+b)^2$

⇒ ② Fassen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich zusammen.

a) $16x^3 + 5xy^2 - 2y^3 - 24x^2y + 7xy^2$

b) $\dfrac{1}{x^2-2x-15} \cdot \left(x^3+3x^2-25x-75\right)$

c) $b^3 + 3 \cdot (a+c) \cdot b^2 + (6ac + 3c^2 + 3a^2) \cdot b + (3c^2a + a^3 + 3a^2c + c^3)$

⇒ ③ Bestimmen Sie jeweils die Variablen ggf. in Abhängigkeit voneinander, indem Sie die Ausdrücke so weit wie möglich vereinfachen.

a)
$$\begin{aligned}\frac{5\cos^2(\alpha)}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \sin^2(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha)}{\sqrt{6}} - \frac{1-\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}\left(\frac{13\cos^2(\alpha)}{4\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\\ + \frac{3\sqrt{6}}{8} \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{2\cos(\alpha)}{\sqrt{24}} + \frac{3\sqrt{6}}{4} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{6}\sqrt{6}\end{aligned}$$

b) $1 = \dfrac{\omega(\tau^3 - 9\tau^2 + 27\tau - 27)}{2\tau^2 - 12\tau + 18}$

c) $\dfrac{2a_1}{2a_2a_3 - 3a_1a_2} = \dfrac{9\sqrt{4}a_1^2}{3a_1 - 2a_3} + \dfrac{2a_1}{3a_2a_1 - 2a_3a_2}$

1.5 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

⇒ Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme beispielsweise durch sinnvolles Addieren eines Vielfachen einer Gleichung auf eine andere.

a) Bestimmen Sie x und y.

$$\begin{aligned} 6x + 12y &= 30 \\ 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie x, y und z.

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie x_1 bis x_4.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie x_1 bis x_4.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -9 \end{aligned}$$

1.6 Potenzen-, Wurzel- und Logarithmengesetze

⇒ ① Berechnen Sie jeweils x.

a) $x^{-3} = \dfrac{144}{x^5}$

b) $x^6 = \sqrt{y^3}$

c) $x^2 = \dfrac{343}{x}$

⇒ ② Lösen Sie nach der Unbekannten auf und bestimmen Sie diese.

a) $\ln(x) = \ln(5) - \ln(x^2) + \ln(2)$

b) $\mathrm{e}^{\gamma^2+1} = 5$

c) $5^x = 2$

d) $-\lg(10^{-4}) = \mathrm{pH}$

e) $\exp\left\{\ln\left(\dfrac{e}{2^2}\right) + 1\right\} = \dfrac{1}{4}$

⇒ ③ Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $2\ln(x+1) = \ln(x^3+1) - \ln(x)$

b) $2\,\mathrm{e}^{-x} - 12\,\mathrm{e}^{x} = 5$

c) $\log_5(1+x) - \log_{\sqrt{5}}(1-2x) = \log_{\frac{1}{5}}(3+4x)$

1.7 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

⇒ ① Stellen Sie am Einheitskreis die Funktionen $sinx$, $cosx$, $tanx$ und $cotx$ dar.

⇒ ② Zeigen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind.

a) $2\cos^2(\alpha) = \cos(2\alpha) + 1$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ist berechenbar mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ und
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
Nutzen Sie den Zusammenhang $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)$

1.8 Komplexe Zahlen

⇒ ① Führen Sie folgende Rechnungen mit komplexen Zahlen aus.

a) $(5+3i) + (2+7i)$

b) $(1-2i) + (-2+i)$

c) $(3+i) - (2-i)$

d) $(1+i)\cdot(3-i)$

e) $(2i-1)\cdot(1+2i)$

f) $|(2i+1)|$

g) $\dfrac{3+i}{1-i}$

⇒ ② Vereinfachen Sie den Ausdruck $\ln\left(\dfrac{2\pi}{\mathrm{e}^{-i\pi}+3}\right)$.

2 Lineare Algebra

2.1 Verknüpfungen von Vektoren

2.1.1 Addition

⇒ Berechnen Sie folgende Summen.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5x+3y \\ -x+z \\ 3y-2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x-2z \\ 2x+3y \\ -x+z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3y-2z \\ x+2y+z \\ -x+3y \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5i-1 \\ -i+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3i+2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2.1.2 Skalare Multiplikation

⇒ Skalieren Sie die Vektoren wie angegeben.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $(2i-1) \cdot \begin{pmatrix} i+1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $(2x+y) \cdot \begin{pmatrix} -2x-y \\ 2x-y \\ 2 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} -y \\ -y \\ 2 \end{pmatrix}$

2.1.3 Skalarprodukt

⇒ Berechnen Sie folgende Skalarprodukte.

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\left\langle \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ -i \\ i-3 \end{pmatrix} \right\rangle$

d) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 42 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

e) Zeigen Sie, dass $\left\langle c \cdot \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = c \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ gilt.
Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

2.1.4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

⇒ Berechnen Sie folgende Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2x+3 \\ y^2 \\ -x+z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ z+3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3y^2+z^2-xz \\ 0 \\ -y^2-2xz \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2i \\ 3 \\ i-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2i+1 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) Zeigen Sie, dass
$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ gilt.
Es sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

2.2 Euklid'sche Norm

⇒ Im Folgenden ist mit *Norm* stets die *Euklid'sche Norm* gemeint.

a) Berechnen Sie die Norm und bilden Sie den normierten Vektor.

(i) $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$ (ii) $\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|$

b) Bestimmen Sie die Norm.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

c) Bestimmen Sie die beiden Vektoren, die orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen und die Länge 2 besitzen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d) Welchen Abstand haben zwei diametral gegenüberliegende Ecken eines Würfels mit der Kantenlänge a ?

e) Es sind der Punkt $P = (2, 0, 1)$ und die Ebene $E : x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$ gegeben, wobei P nicht in E liegt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes von der Ebene.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst eine Gerade, die durch P verläuft und die Ebene senkrecht schneidet.

2.3 Orthogonalität

⇒ Nutzen Sie für folgende Aufgaben die Definition des Skalarproduktes: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi$.

a) Prüfen Sie, welche der Vektoren zueinander orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\text{(i)} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.

$$\text{(i)} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

d) Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 3)$ und $D = (3, 0)$ durch Vektoren aus. Sind sie zueinander orthogonal?

e) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2.

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ E_2 &: x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

2.4 Matrizen

2.4.1 Addition

⇒ Addieren Sie folgende Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

2.4.2 Matrixmultiplikation

⇒ Multiplizieren Sie folgende Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2$

3 Analysis I

3.1 Funktionen einer Variablen

⇒ ① Stellen Sie die Funktionsgleichungen für folgende Probleme auf.

a) Aus einem Draht der Länge 2 werden vier Teile geschnitten, wobei je zwei Teile genau gleich lang sind. Aus den vier Teilen wird ein Rechteck gelegt. Wie groß ist der Flächeninhalt F dieses Rechtecks und von wie vielen Variablen hängt er mindestens ab?

b) Von einem Faden der Länge L wird ein Stück der Länge k abgeschnitten. Wie groß ist die Gesamtfläche $A_L(k)$ der beiden Kreise, die sich mit den Stücken legen lassen?

c) Auf Ihrem Konto befinden sich 1500 €. Wie lange müssen Sie bei 2% Jahreszins sparen, damit Sie das Semesterticket (300 €) allein aus den Zinserträgen bezahlen können? Stellen Sie zunächst eine allgemeine Formel für Ihren Kontostand $G(t)$ als Funktion der Zeit t in Jahren auf (mit Startkapital S und Zinssatz p).

d) Ein Werkstück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat eine Hypotenusenlänge von c und eine Dicke von 3. Welches Materialvolumen V wird für seine Herstellung benötigt, wenn einer der beiden Winkel den Betrag φ hat?

⇒ ② Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $g(k) = \dfrac{1}{k^2}$

c) $t(y) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-y} + 1}$

d) $\pi(d) = \mathrm{e}^{-d^2}$

3.2 Grenzwerte

⇒ Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{k\to 3} \frac{-7}{(k-3)^2}$

c) $\lim\limits_{z\to 2} \frac{z^2-4}{z-2}$

d) $\lim\limits_{\varphi\to\infty} a^{-\varphi} \quad \text{mit } a > 1$

e) $\lim\limits_{a\to 1} \left(\frac{1}{a-1} \cdot \frac{a^2-1}{(a-1)^2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi - \left(-\frac{1}{10}\right)^n$

3.3 Ableitungen

⇒ ① Gegeben sei die Funktion $f(t) = t^2$.

a) Berechnen Sie den mittleren Anstieg (Differenzenquotient) der Funktion in den Intervallen $[-1, 2]$, $[0, 1]$ und $[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$.

b) Schätzen Sie den Anstieg an der Stelle $x = 0,5$ ab.

c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie den tatsächlichen Anstieg an der Stelle $x = 0,5$ an.

⇒ ② Bestimmen Sie den Extremalpunkt der folgenden Funktionen.

a) $F(a) = a(1-a)$

b) $A_L(k) = \frac{1}{4\pi}\left(k^2 + (L-k)^2\right)$

⇒ ③ Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 4x^2 + 7x - 9)$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}t^3\right)$

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2y \cdot \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{x^3}\right)$

d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(x \ln(y) - \cos(y)\right)$

e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\sqrt{k} + t \cdot \mathrm{e}^k\right)$

3.4 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

⇒ Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(x^2-3)\right)$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t\cdot\sin(t)}\right)$

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)$

d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(k^2-1\right)^{17}$

e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{8y^2-1}{y+2}\right)$

f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x\sqrt{1-x}}\right)$

g) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(n^n\right)$

h) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$

i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\right)$

3.5 Höhere Ableitungen

⇒ ① Berechnen Sie folgende Ableitungen.

a) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{-t^2}$

b) $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(ax^3+bx^2+cx\right)$

c) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)$

d) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\tan(y)$

e) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln(x)$

f) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right)^2$

⇒ ② Wo haben folgende Funktionen eine betragsmäßig maximale Steigung?

a) $f(y)=y\,\mathrm{e}^{-y^2}$

b) $f(p)=p^3+p^2-xp+k$

3.6 Kurvendiskussion

⇒ Zeichnen Sie auf Grundlage Ihrer Untersuchung jeweils den Graphen der Funktion.

a) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten anhand der Funktion $f(x)=x^3+x^2-x-1$. Diskutieren Sie zudem die Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches. Welche Extrempunkte erhält man, wenn man nur den Teil der Funktion mit der höchsten Potenz betrachtet?

b) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten, Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches der Funktion $f(c) = (c^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{2c}$. Berechnen Sie die Fläche zwischen λ (mit $\lambda <$ -1) und -1 zwischen der Funktion und der x-Achse. Welches Resultat erhält man für die Fläche, wenn λ sich $-\infty$ annähert?

c) Diskutieren Sie die Existenz von Extrempunkten und Wendepunkten, Schnittpunkte mit den Achsen sowie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches der Funktion $k(x) = x^3 \cdot \ln(x) - x^3$. Berechnen Sie die Fläche zwischen λ (mit 0 $< \lambda <$ e) und e zwischen der Funktion und der x-Achse. Welches Resultat erhält man für die Fläche, wenn λ sich 0 annähert?

4 Analysis II

4.1 Koordinatensysteme

⇒ Nutzen Sie Koordinatentransformationen zum Lösen der folgenden Aufgaben.

a) Ein Punkt liege in der 2D-Ebene bei $r = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{4}$. Geben Sie den Punkt in kartesischen Koordinaten an.

b) Ein Punkt liege im kartesischen Koordinatensystem bei $x = 1$, $y = 1$ und $z = \sqrt{2}$. Geben Sie seine Position sowohl in Kugel- als auch Zylinderkoordinaten an.

4.2 Partielle Ableitungen und das Totale Differential

⇒ Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Bildung partieller Ableitungen und ggf. durch Aufstellen des Totalen Differentials.

a) Gegeben sei $\sqrt{U(S,V)} = 1 + \ln\left(\frac{S}{V}\right)$.

(i) Finden Sie einen Ausdruck für $U(S,V)$.

(ii) Überprüfen Sie, ob der Satz von Schwarz erfüllt ist.

b) Bilden Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial c(t,\tau)}{\partial t}$ und $\dfrac{\partial c(t,\tau)}{\partial \tau}$.

$$c(t,\tau) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + b\,\mathrm{e}^{-t}$$

c) Geben Sie eine explizite Funktion für G(P,S) an, wenn $H = \left(\frac{S}{P}\right)^{-2}$.

$$G\left(P, \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)\right) = P(1-P) + \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)^3$$

d) Zeigen Sie, dass der Satz von Schwarz für folgendes Totales Differential erfüllt ist.

$$\mathrm{d}E(\theta,\phi) = \left(1 - \left(\frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}\right)^2\right)\cos(\phi)\,\mathrm{d}\theta - \left(\frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}\right)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

e) Bilden Sie alle einfachen partiellen Ableitungen nach den abhängigen Variablen.

(i) $z(x,y) = \frac{xy}{2} + \left(x\sqrt{y}\right)^2$

(ii) $\psi(\omega,t) = \sin(\omega t)\cos(t)$

(iii) $m(\alpha,n) = \frac{\alpha(n^2+n^3)}{\sqrt{\alpha}}$

(iv) $H(p,q) = pq + (pq)^2 + (pq)^{-2}$

(v) $x(t,r) = r\,\mathrm{e}^{-(\frac{t}{r})^2}$

(vi) $\xi(g,\beta) = \frac{\ln(\beta)}{g} + a$

f) Gegeben sei $R(R_1,R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

Bestimmen Sie ausgehend von den Werten $R_1 = (100 \pm 2)\Omega$ und $R_2 = (200 \pm 4)\Omega$ den Fehler in R.

4.3 Integrale (Substitution, partielle Integration)

⇒ Berechnen Sie folgende Integrale. Nutzen Sie dazu ggf. Substitution und/oder partielle Integration.

a) $\displaystyle\int x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x \cdot 3 \cdot x^3 \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cos(3u) \,\mathrm{d}u$

d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int 3x \cdot \sin(x) \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \sin(2x) \cdot \cos(2x) \,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) \,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x + \ln(-x)}{x^3} \,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int x \cdot (\sqrt{x+1})^3 \,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int r \cdot \mathrm{e}^{-r^2} \,\mathrm{d}r$

4.4 Uneigentliche Integrale

⇒ Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, indem Sie zunächst eine Stammfunktion finden und dann den entsprechenden Grenzwert bilden.

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_{-\infty}^{1} 2^x\,\mathrm{d}x$

e) $\int\limits_{0}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-4x+1}\,\mathrm{d}x$

4.5 Integrale mehrerer Variablen

⇒ Berechnen Sie folgende Integrale, indem Sie nacheinander über alle variablen integrieren.

a) $\int\limits_{2}^{4}\int\limits_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1} 3\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

c) $\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{5} r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$

d) $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{h} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

e) $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

f) $\int\limits_{\pi}^{3\pi}\int\limits_{1}^{2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

g) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x+i\,\pi} \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

5 Anwendungen in der Chemie

Die folgenden Aufgaben sind exemplarische Beispiele, die Studierenden in den ersten Semestern in den Veranstaltungen begegnen werden und veranschaulichen sollen, was an Mathematik mindestens erforderlich ist.

5.1 Stöchiometrie

⇒ ① Bestimmen Sie, wie viel von den folgenden Stoffen verwendet werden muss, um 750 mL einer 0,2 M Lösung herzustellen.

a) NaCl, $M_{NaCl} = 58,44\ \frac{g}{mol}$

b) $KMnO_4$, $M_{KMnO_4} = 158.0\ \frac{g}{mol}$

⇒ ② Berechnen Sie, wie viel mg Natriumcarbonat bei der Umsetzung von 2 g Natriumhydroxid mit Kohlenstoffdioxid entstehen, die nach der folgenden Reaktion abläuft:

$$2\,NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O$$

Die molaren Massen betragen $M_{NaOH} = 40\ \frac{g}{mol}$ und $M_{Na_2CO_3} = 106\ \frac{g}{mol}$.

⇒ ③ Im Laboralltag müssen handelsübliche Lösungen für Synthesen verdünnt werden. Beispielsweise ist Schwefelsäure nur mit einem Massenanteil w von 96% und einer Dichte ρ von $1,84\ \frac{g}{mL}$ erhältlich. Berechnen Sie das benötigte Volumen an konzentrierter Schwefelsäure, um einen halben Liter 1 M Lösung herzustellen, dabei beträgt die molare Masse von Schwefelsäure $M_{H_2SO_4} = 98,1\ \frac{g}{mol}$.

5.2 Thermodynamik

⇒ Es wird ein ideales Gas betrachtet, für welches das ideale Gasgesetz gilt: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$. Dabei ist R die ideale Gaskonstante, welche $8.314\ \frac{J}{mol \cdot K}$ beträgt.

a) Zwei Mol des idealen Gases werden von 10 L auf 20 L isotherm bei 293 K expandiert, d.h. die Temperatur wird während der Expansion konstant gehalten. Berechnen Sie den Anfangsdruck p_A vor der Expansion und den Druck p_E nach der Expansion in bar.

b) Stellen Sie in einem p-V-Diagramm graphisch die Isotherme, die Isobare ($p = const.$) und die Isochore ($V = const.$) dar.

c) Während der reversiblen isothermen Expansion wird eine Volumenarbeit verrichtet. Leiten Sie ausgehend von der nachfolgenden Beziehung einen Ausdruck für die Volumenarbeit Δw her und berechnen Sie diese mit den gegebenen Werten aus a).

$$\Delta w = \int_{V_{Anfang}}^{V_{Ende}} -p(V)\,\mathrm{d}V$$

5.3 Analytik

⇒ ① Bei der Analyse einer unbekannten Substanz ergab sich eine Zusammensetzung von 45.0 % Kalium, 18.5 % Schwefel und 36.5 % Sauerstoff, die Werte der Zusammensetzung sind in Masseprozent angegeben. Welche Summenformel besitzt die unbekannte Substanz?

⇒ ② Mittels Säure-Base-Titration kann der Gehalt von Säuren bzw. Basen in wässriger Lösung bestimmt werden. Dabei wird zwischen starken und schwachen Säuren (Basen) unterschieden: Starke Säuren wie HCl dissoziieren in Lösung vollständig, schwache wie $NH_4{}^+$ hingegen nur zum Teil.

a) Leiten Sie eine Gleichung für die Berechnung des pH-Wertes von einer schwachen Säure her. Stellen Sie dazu die Reaktionsgleichung auf und gehen Sie von der folgenden Annahme aus: $c_{HA,Anfang} >> c_{\mathrm{H_3O^+}}$

b) Bestimmen Sie den pH-Wert einer wässrigen 0.08 M HCl-Lösung und einer wässrigen 0.08 M NH_4Cl-Lösung ($pK_S = 9.37$).

c) Von 100 mL einer HCl-Lösung unbekannter Konzentration werden 20 mL abgenommen und mit 0.2 M Natronlauge titriert. Bis zum Äquivalenzpunkt wurden 23.4 mL Natronlauge verbraucht. Bestimmen Sie die Masse an HCl in den ursprünglich vorhandenen 100 mL Lösung.